Wspomaganie Decyzji w Warunkach Ryzyka

Projekt: WDWR 25406

Krzysztof Rudnicki 307585

May 24, 2025

Treść zadania

Rozważmy następujące zagadnienie planowania produkcji:

- Przedsiębiorstwo wytwarza 4 produkty P1,...,P4 na następujących maszynach: 4 szlifierkach, 2 wiertarkach pionowych, 3 wiertarkach poziomych, 1 frezarce i 1 tokarce. Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0,4	0,6	-	-
Wiercenie pionowe	0,2	0,1	-	0,6
Wiercenie poziome	0,1	-	0,7	-
Frezowanie	0,06	0,04	-	0,05
Toczenie	-	0,05	0,02	-

- Dochody ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę) określają składowe wektora $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_4)^T$. Wektor $\mathbf{R}$ opisuje 4-wymiarowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału $[5; 12]$. Wektor wartości oczekiwanych μ oraz macierz kowariancji Σ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Istnieją ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

	P1	P2	P3	P4
Styczeń	200	0	100	200
Luty	300	100	200	200
Marzec	0	300	100	200

- Jeżeli sprzedaż danego produktu przekracza 80 procent ilości jaką może wchłonąć rynek, jego dochód spada o 20 procent.

- Istnieje możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu w danym czasie w cenie 1 zł/sztukę za miesiąc. W chwili obecnej (grudzień) w magazynach znajduje się po 50 sztuk każdego produkt. Istnieje wymaganie, aby tyle pozostało również pod koniec marca.

- Przedsiębiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Każda zmiana trwa 8 godzin. Można założyć, że każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych.

Polecenia

1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka ze średnią jako miarą zysku i średnią różnicą Giniego jako miarą ryzyka. Dla decyzji $\mathbf{x} \in Q$ średnia różnica Giniego jest definiowana jako $\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t"=1}^{T}|r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})|p_{t'}p_{t"}$, gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizację dla scenariusza t, p_t prawdopodobieństwo scenariusza t.

   (a) Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni zysk-ryzyko.

   (b) Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko-zysk?

   (c) Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić, czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

1 Jednokryterialny model wyboru

Model jednokryterialny wyboru w warunkach ryzyka został zaprojektowany w celu identyfikacji rozwiązania optymalnego poprzez maksymalizację oczekiwanej wartości zysku. Wartość oczekiwana jest kalkulowana na podstawie scenariuszy generowanych zgodnie z rozkładem t-Studenta wykorzystującym parametry określone w zadaniu. W analizie założono równomierne prawdopodobieństwo występowania wszystkich scenariuszy.

1.1 Parametry modelu

Wszystkie parametry modelu zostały przedstawione w tabeli poniżej wraz z ich szczegółowymi opisami. Identyczne nazewnictwo zostało zastosowane w implementacji modelu. Dla parametrów będących wektorami i macierzami, w nawiasach kwadratowych określono ich wymiary, odnosząc się do odpowiednich parametrów liczbowych.

1.2 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne stanowią wartości kontrolowane przez podmiot podejmujący decyzje i są fundamentalne dla rozwiązywanego problemu. Zadaniem optymalizatora jest wyznaczenie takich wartości tych zmiennych, które umożliwią osiągnięcie optymalnego rozwiązania. W tabeli zawierającej zmienne decyzyjne modelu zaprezentowano zmienne decyzyjne zastosowane w modelu wraz z ich szczegółowymi opisami. Przyjęto tę samą konwencję nazewnictwa, co w przypadku parametrów modelu.

1.3 Ograniczenia

- Ograniczenie dolne wartości zmiennych decyzyjnych – wartości nie mogą być mniejsze od zera:

$$\forall_{\substack{m\in months\\ p\in products\\ mc\in machines}} \quad workTime[m][mc][p] >= 0 \tag{1}$$

$$\forall_{\substack{m\in months\\ p\in products}} \quad produce[m][p] >= 0 \tag{2}$$

$$\forall_{\substack{m\in months\\ p\in products}} \quad sell[m][p] >= 0 \tag{3}$$

Table 1: Tabela zawierająca parametry modelu jednokryterialnego

Nazwa parametru	Szczegółowy opis znaczenia
numberOfMachineTypes	Ilość typów maszyn (procesów) dostępn
numberOfMonths	Ilość miesięcy uwzględnionych w symul
numberOfProductsTypes	Ilość typów produktów
numberOfScenarios	Ilość scenariuszy wygenerowanych do s
machines[numberOfMachineTypes]	Wektor typów maszyn (procesów)
months[numberOfMonths]	Wektor miesięcy symulacji
products[numberOfProductsTypes]	Wektor typów produktów
machineCount[numberOfMachineTypes]	Wektor ilości maszyn danego typu
timeToProduce[numberOfMachineTypes][numberOfProductsTypes]	macierz czasów produkcji danego prod maszynie
maxProductsInMonth[numberOfMonths][numberOfProductsTypes]	macierz maksymalnej ilości produktów sprzedać w danym miesiącu
numberOfHoursInFactory	Ilość godzin pracy fabryki w miesiącu
mu[numberOfProductsTypes]	Wektor wartości oczekiwanych rozkładu generacji scenariuszy
sigma [numberOfProductsTypes][numberOfProductsTypes]	Macierz kowariancji dla rozkłady t-Stu
sellProfit[numberOfScenarios][numberOfProductsTypes]	Macierz wygenerowanych sceniariuszy sprzedaży produktów
storageCost	Koszt trzymania jednej sztuki produkt przez miesiąc
storageMax[numberOfProductsTypes]	Wektor maksymalnej pojemności r każdego typu produktu
storageStart[numberOfProductsTypes]	Wektor ilości początkowej produktów v

Table 2: Tabela zawierająca zmienne decyzyjne modelu

Nazwa zmiennej	Szczegółowy opis znaczen
produce[numberOfMonths][numberOfProductsTypes]	Macierz zawierające ilośc tuk danego typu produktu
sell[numberOfMonths][numberOfProductsTypes]	Macierz zawierająca ilośc tuk danego typu produktu
stock[numberOfMonths][numberOfProductsTypes]	Macierz zawierająca ilośc produktu znajdujących s danym miesiącu
workTime[numberOfMonths][numberOfMachineTypes][numberOfProductsTypes]	Macierz zawierająca c maszyny dla każdego kazdym miesiącu
if80prec[numberOfMonths][numberOfProductsTypes]	Macierz zmiennych bi sprzedaż danego produktu przekroczyła 80% wartoś w przeciwnym wypadku)
lowerProfit[numberOfScenarios][numberOfMonths][numberOfProductsTypes]	Macierz przechowująca l odjąć od zysków z pos produktów w poszczególn względu na przekroczeni rynku. Zmienna niezbędn nia obecności zmiennej oceny

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad stock[m][p] >= 0 \tag{4}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} \quad lowerProfit[i][m][p] >= 0 \tag{5}$$

- Ograniczenie czasowe pracy maszyn - Każda maszyna może pracować maksymalnie *numberOfHoursInFactory* godzin w miesiącu, zatem łączny czas pracy wszystkich maszyn danego typu nie może przekroczyć iloczynu liczby dostępnych maszyn tego typu i czasu *numberOfHoursInFactory*.

$$\forall_{\substack{m \in months \\ mc \in machines}} \sum_{p \in products} (workTime[m][mc][p] <= machineCount[mc] * numberOfHoursInFactory) \tag{6}$$

- Ograniczenie wiążące czas pracy maszyn z produkcją - czas wykorzystania określonego typu maszyny jest równy sumie iloczynów liczby wytworzonych jednostek każdego produktu i czasu potrzebnego na obróbkę jednej jednostki tego produktu na danej maszynie:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ mc \in machines \\ p \in products}} \quad workTime[m][mc][p] == produce[m][p] * timeToProduce[mc][p] \tag{7}$$

- Ograniczenie maksymalnej sprzedaży wynikające z pojemności rynku w danym miesiącu:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad sell[m][p] == maxProductsInMonth[m][p] \tag{8}$$

- Warunki definiujące zmienną binarną przy przekroczeniu 80 procent chłonności rynku:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad sell[m][p] <= 0.8 * maxProductsInMonth[m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] \tag{9}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad sell[m][p] >= 0.8 * maxProductsInMonth[m][p] * if80prec[m][p] \tag{10}$$

- Ograniczenia linearyzujące oddziaływanie zmiennych binarnych na funkcję celu:

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} \quad lowerProfit[i][m][p] <= 1000000 * if80prec[m][p] \tag{11}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} \quad lowerProfit[i][m][p] <= 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] \tag{12}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} \quad 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] - lowerProfit[i][m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] <= 1000000; \tag{13}$$

- Ograniczenie sprzedaży do liczby sztuk wyprodukowanych oraz dostępnych w magazynie. Dla pierwszego miesiąca ograniczenie przyjmuje formę:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] <= produce[m][p] + storageStart[p] \tag{14}$$

  Dla każdego następnego miesiąca:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] <= produce[m][p] + stock[m-1][p] \tag{15}$$

- Ograniczenie określające stan magazynu na koniec miesiąca jako różnicę między sumą produktów wyprodukowanych i dostępnych na początku miesiąca a liczbą sprzedanych jednostek. Dla pierwszego miesiąca:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} stock[m][p] == (produce[m][p] + storageStart[p]) - sell[m][p] \tag{16}$$

  Dla każdego następnego miesiąca:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} stock[m][p] == (produce[m][p] + stock[m-1][p]) - sell[m][p] \tag{17}$$

1.4 Funkcja celu

Funkcja celu w modelu jednokryterialnym polega na maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku ze wszystkich analizowanych scenariuszy. W każdym ze scenariuszy zastosowano funkcję zysku o następującej postaci

$$\begin{split}\forall_{\substack{i < nScernarios \\ i \in N}} profit[i] = \sum_{m \in months} \sum_{p \in products} (sell[m][p] \cdot sellProfit[i][p] \\ - lowerProfit[i][m][p] - stock[m][p] * storageCost)\end{split} \tag{18}$$

1.5 Implementacja modelu

1.5.1 Generacja scenariusz dochodów ze sprzedaży

Przychody ze sprzedaży poszczególnych typów produktów definiowane są przez wektor losowy opisany w treści zadania. W celu wygenerowania wektorów reprezentujących poszczególne scenariusze przychodów zastosowano bibliotekę MASS języka R. Implementacja została wykonana w środowisku R Studio IDE, a skrypt generujący dane zapisano w pliku dołączonym jako załącznik 1 - *t-student.R*. W ramach przeprowadzonej symulacji wygenerowano 1000 scenariuszy realizacji przychodów.

1.5.2 Model

Model zaimplementowano w środowisku IBM ILOG CPLEX Optimization Studio z wykorzystaniem solvera CPLEX. Nazewnictwo parametrów oraz zmiennych decyzyjnych jest zgodne z opisem zawartym w tabelach 1 i 2. Plik *wdwr17421-1.dat* (załącznik 2) zawiera definicje parametrów modelu, natomiast plik *wdwr17421-1.mod* (załącznik 3) obejmuje wczytywanie parametrów, definicje zmiennych decyzyjnych, funkcji celu oraz ograniczeń modelu. W celu uproszczenia implementacji przyjęto numeryczne oznaczenia dla miesięcy, produktów oraz procesów technologicznych. Miesiące numerowane są chronologicznie, produkty zgodnie z indeksem występującym w nazwie (P1-P4), natomiast procesy technologiczne według poniższej sekwencji:

1. Szlifowanie,
2. Wiercenie pionowe,
3. Wiercenie poziome,
4. Frezowanie,
5. Toczenie.

1.6 Rozwiązanie

Rozwiązanie optymalne modelu maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku zostało wyznaczone przy użyciu solvera CPLEX. Maksymalna wartość oczekiwana zysku wynosi około 11036,12 zł. Optymalne wartości zmiennych decyzyjnych przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{sell} = \begin{pmatrix} 160 & 0 & 80 & 160 \\ 240 & 80 & 160 & 160 \\ 0 & 240 & 80 & 160 \end{pmatrix}, \mathbf{if80prec} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{stock} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}, \mathbf{produce} = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 30 & 110 \\ 240 & 30 & 160 & 160 \\ 50 & 290 & 130 & 210 \end{pmatrix}$$

Czasem pracy poszczególnych typów maszyn dla różnych typów produktów w każdym miesiącu obrazują następujące macierze:

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} 44 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 0 & 66 \\ 11 & 0 & 35 & 0 \\ 6.6 & 0 & 0 & 5.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{workTime}[\mathbf{2}] = \begin{pmatrix} 96 & 18 & 0 & 0 \\ 48 & 3 & 0 & 96 \\ 24 & 0 & 140 & 0 \\ 14.4 & 1.2 & 0 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{3}] = \begin{pmatrix} 20 & 174 & 0 & 0 \\ 10 & 29 & 0 & 126 \\ 5 & 0 & 105 & 0 \\ 3 & 11.6 & 0 & 10.5 \\ 0 & 14.5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ze względu na znaczne rozmiary macierzy lowerProfit pominięto jej przedstawienie w niniejszym raporcie. Kompletne wyniki działania solvera zostały załączone do dokumentu jako załącznik 4.

1.7 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że zdolności produkcyjne przedsiębiorstwa znacznie przewyższają chłonność rynku. W kontekście maksymalizacji zysku, w określonych miesiącach ekonomicznie uzasadniona jest sprzedaż poszczególnych produktów mimo przekroczenia 80% pojemności rynkowej. Optymalna strategia nie wymaga gromadzenia zapasów ponad obligatoryjne minimum magazynowe.

2 Model dwukryterialny zysku i ryzyka

2.1 Model zadania

Model przedsiębiorstwa został zachowany w niezmienionej formie w porównaniu do pierwszej części zadania. Miarą zysku pozostaje wartość oczekiwana, która w przypadku scenariuszy o równym prawdopodobieństwie odpowiada wartości średniej. Miara ryzyka w niniejszym zadaniu jest reprezentowana przez średnią różnicę Giniego określoną następującym wzorem:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t"=1}^{T}|r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})|p_{t'}p_{t"}, \tag{19}$$

gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizację zysku dla scenariusza t', a p_t - prawdopodobieństwo wystąpienia scenariusza t.

W kontekście przyjętych w projekcie oznaczeń, wyrażenie definiujące miarę ryzyka przyjmuje następującą postać:

$$riskMeasureGini = \frac{1}{2}\cdot \sum_{t1 \in scenarios}\sum_{t2 \in scenarios} |profit[t1] - profit[t2]| \cdot \frac{1}{numberOfScenarios} \cdot \frac{1}{numberOfScenario} \tag{20}$$

2.2 Model preferencji

Model preferencji oparto na minimalizacji ryzyka przy zadanym poziomie średniego zysku.

$$averageProfit < minimalAverageProfit \tag{21}$$

$$minimizeriskMeasureGini \tag{22}$$

minimalAverageProfit stanowi dodatkowy parametr modelu. Załączniki 5 i 6 zawierają pliki z parametrami i modelem zadania dwukryterialnego wyboru - pliki źródłowe przeznaczone dla solvera CPLEX.

2.3 Zbiór rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

Na rysunku 1 zaprezentowano rozwiązania efektywne modelu w przestrzeni ryzyko-zysk. Niebieskie trójkąty oznaczają rozwiązania efektywne dla różnych wartości wymaganego poziomu zysku. Uwzględniając ograniczenia obliczeniowe komputera, wygenerowano 52 równomiernie rozmieszczone rozwiązania, z których każde bazuje na 30 scenariuszach. Wprowadzono ograniczenie czasowe działania solvera dla pojedynczego rozwiązania na poziomie 5 minut. Całkowity czas obliczeń przekroczył 3 godziny. Załączniki 7 i 8 obejmują pliki parametrów oraz modelu wraz ze skryptem dla solvera CPLEX, które zostały wykorzystane do uzyskania rozwiązań. Kolorem żółtym wyróżniono rozwiązanie maksymalnego zysku oraz minimalnego ryzyka. Wartości odpowiadające tym rozwiązaniom przedstawiono w tabeli 2.4.

2.4 Rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku

Na wykresie 1 żółtymi punktami wyznaczono rozwiązania charakteryzujące się maksymalnym zyskiem oraz minimalnym ryzykiem. Wartości w przestrzeni ryzyko-zysk dla tych rozwiązań przedstawiono w tabeli 2.4.

Table 3: Rozwiązania maksymalnego zysku i minimalnego ryzyka

	Miara zysku	Miara ryzyka
Maksymalizacja zysku	9515.80 zł	360.18 zł
Minimalizacja ryzyka	-600.00 zł	0.0 zł

Rozwiązanie zadania jednokryterialnego maksymalizacji zysku charakteryzuje się również maksymalizacją poziomu ryzyka, podczas gdy zadanie minimalizacji ryzyka bez nałożenia ograniczeń na poziom zysku prowadzi do ujemnego wyniku finansowego (straty) wynikającego z rezygnacji ze sprzedaży oraz ponoszenia kosztów utrzymania obligatoryjnych zapasów magazynowych.

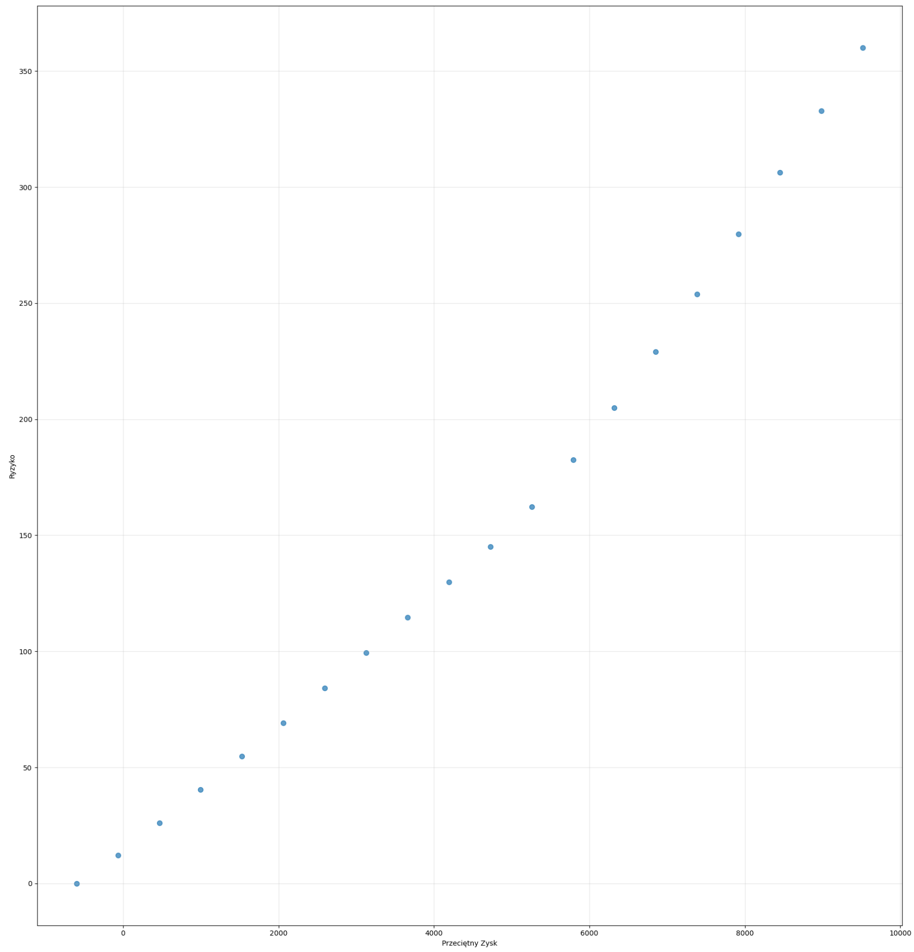

Figure 1: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

2.5 Sprawdzenie dominacji stochastycznej wybranych rozwiązań efektywnych

W celu analizy dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (FSD) wybrano 3 rozwiązania efektywne modelu, oznaczone jako A, B oraz C. Wartości średniego zysku oraz miary ryzyka dla tych rozwiązań zostały zaprezentowane w tabeli 2.5. Wybór objął rozwiązania charakteryzujące się zbliżonymi poziomami średniego zysku, przy różnicy wynoszącej około 500 zł. Załączniki 9 i 10 zawierają pliki parametrów oraz modelu wraz ze skryptem dla solvera CPLEX, wykorzystane do generowania danych dotyczących zysku i ryzyka w poszczególnych scenariuszach.

Table 4: Rozwiązania wybrane do analizy dominacji FSD

	A	B	C
Ograniczenie minimalnego zysku	8450.97 zł	8983.38 zł	9515.79 zł
Średni zysk	8451.02 zł	8983.40 zł	9515.80 zł
Miara ryzyka	306.38 zł	332.93 zł	360.18 zł

W celu weryfikacji wzajemnej dominacji wybranych rozwiązań w sensie FSD przygotowano odwrotne dystrybuanty dla obu kryteriów. Rysunek 2 ilustruje odwrotną dystrybuantę rozkładu średniego zysku między scenariuszami dla trzech wybranych rozwiązań efektywnych. Analiza wykresu wskazuje, że rozwiązanie C wykazuje dominację nad rozwiązaniami A i B w sensie

FSD, co oznacza, że w każdym scenariuszu miara zysku dla decyzji C przewyższa odpowiednie wartości dla decyzji A i B. Ponadto rozwiązanie B dominuje rozwiązanie A w sensie FSD.

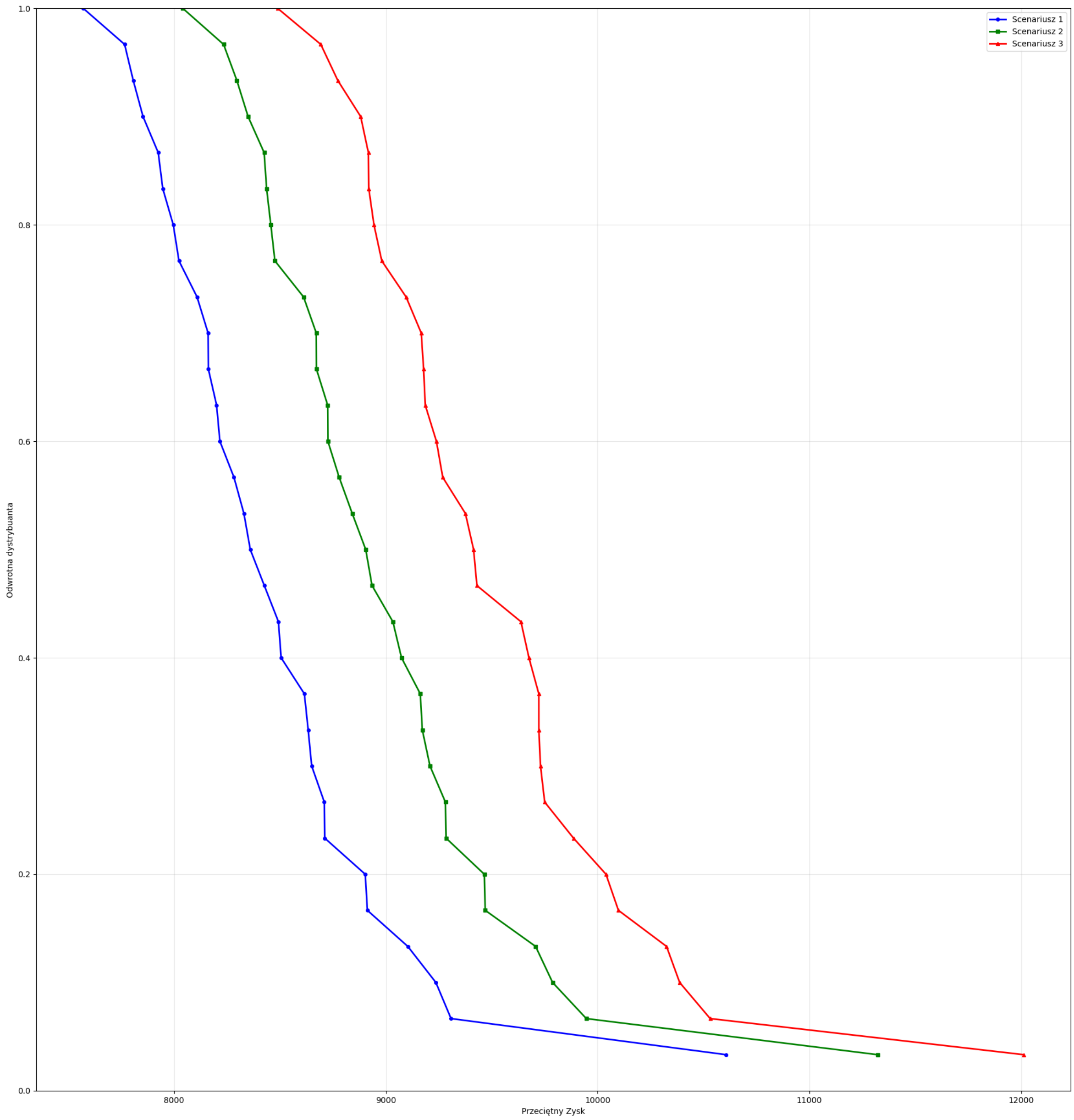

Figure 2: Odwrotna dystrybuanta rozkładu średniego zysku między scenariuszami

Rysunek 3 przedstawia odwrotną dystrybuantę rozkładu średniej różnicy Giniego jako miary ryzyka między scenariuszami dla tych samych trzech rozwiązań efektywnych. W kontekście miary ryzyka rozwiązanie A wykazuje dominację nad rozwiązaniami B i C, podczas gdy rozwiązanie B nie dominuje w sposób kategoryczny rozwiązania C. Przyczyna tego zjawiska jest związana z przecięciem się dystrybuant w punkcie oznaczonym kolorem żółtym na wykresie przedstawionym na rysunku 2.

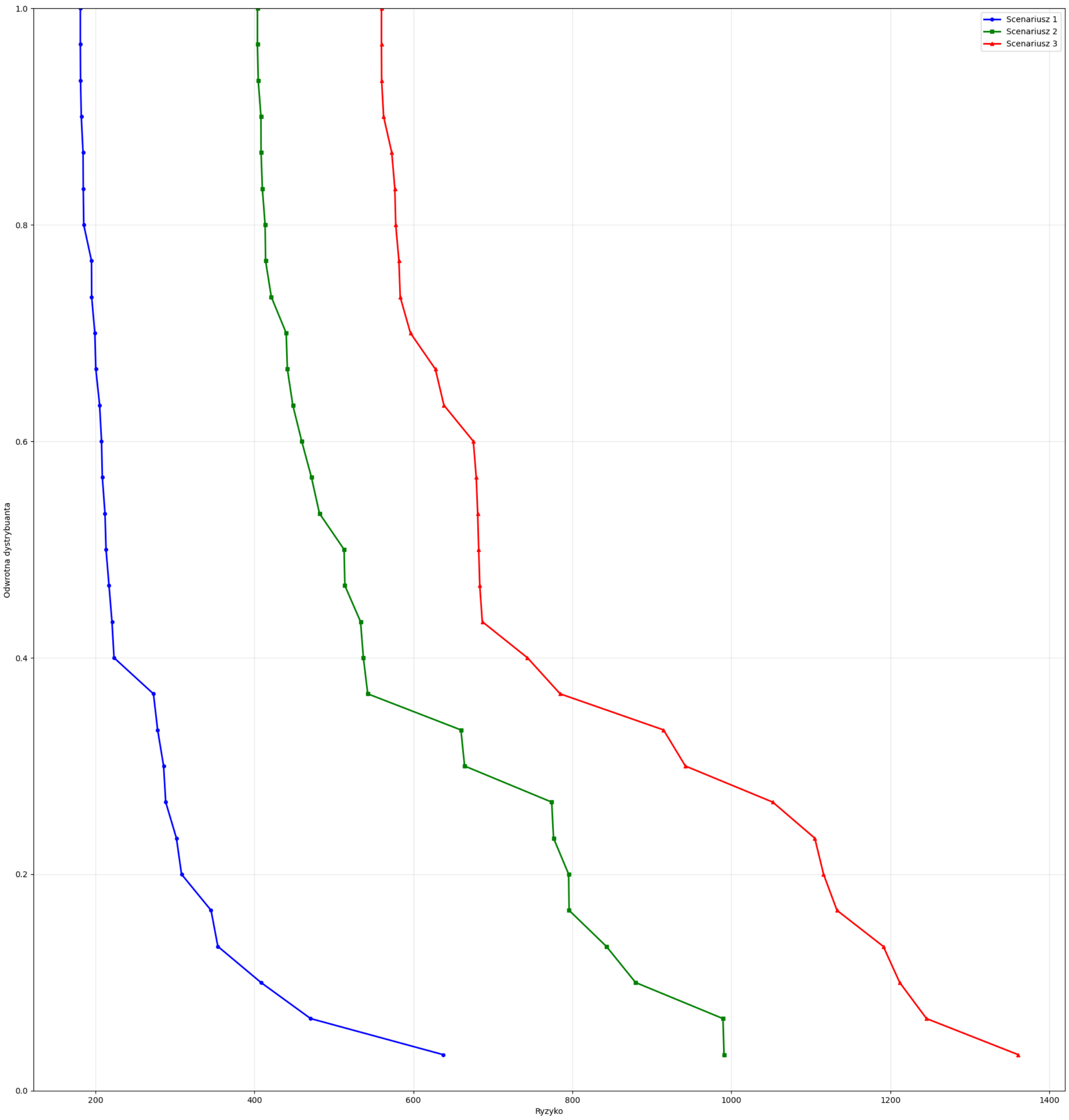

Figure 3: Odwrotna dystrybuanta rozkładu średniej różnicy Giniego między scenariuszami