Wspomaganie Decyzji w Warunkach Ryzyka
Projekt numer 25406

Krzysztof Rudnicki
numer albumu: 307585

May 25, 2025

Contents

Treść zadania

Rozważmy następujące zagadnienie planowania produkcji:

- Przedsiębiorstwo wytwarza 4 produkty P1,...,P4 na następujących maszynach: 4 szlifierkach, 2 wiertarkach pionowych, 3 wiertarkach poziomych, 1 frezarce i 1 tokarce. Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0,4	0,6	-	-
Wiercenie pionowe	0,2	0,1	-	0,6
Wiercenie poziome	0,1	-	0,7	-
Frezowanie	0,06	0,04	-	0,05
Toczenie	-	0,05	0,02	-

- Dochody ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę) określają składowe wektora $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_4)^T$. Wektor $\mathbf{R}$ opisuje 4-wymiarowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału $[5; 12]$. Wektor wartości oczekiwanych μ oraz macierz kowariancji Σ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Istnieją ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

	P1	P2	P3	P4
Styczeń	200	0	100	200
Luty	300	100	200	200
Marzec	0	300	100	200

- Jeżeli sprzedaż danego produktu przekracza 80 procent ilości jaką może wchłonąć rynek, jego dochód spada o 20 procent.

- Istnieje możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu w danym czasie w cenie 1 zł/sztukę za miesiąc. W chwili obecnej (grudzień) w magazynach znajduje się po 50 sztuk każdego produkt. Istnieje wymaganie, aby tyle pozostało również pod koniec marca.

- Przedsiębiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Każda zmiana trwa 8 godzin. Można założyć, że każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych.

Polecenia

1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka ze średnią jako miarą zysku i średnią różnicą Giniego jako miarą ryzyka. Dla decyzji $\mathbf{x} \in Q$ średnia różnica Giniego jest definiowana jako $\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t"=1}^{T}|r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})|p_{t'}p_{t"}$, gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizację dla scenariusza t, p_t prawdopodobieństwo scenariusza t.

   (a) Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni zysk-ryzyko.

   (b) Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko-zysk?

   (c) Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić, czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

1 Wstęp teoretyczny

Model jednokryterialny wyboru w warunkach ryzyka został zaprojektowany w celu identyfikacji rozwiązania optymalnego poprzez maksymalizację oczekiwanej wartości zysku. Wartość oczekiwana jest kalkulowana na podstawie scenariuszy generowanych zgodnie z rozkładem t-Studenta wykorzystującym parametry określone w zadaniu. W analizie założono równomierne prawdopodobieństwo występowania wszystkich scenariuszy.
Wszystkie parametry modelu zostały opisane poniżej. Identyczne nazewnictwo zostało zastosowane w implementacji modelu. Dla parametrów będących wektorami i macierzami, w nawiasach kwadratowych określono ich wymiary, odnosząc się do odpowiednich parametrów liczbowych.

1.1 Opis parametrów

numberOfMachineTypes - Ilość typów maszyn (procesów) dostępnych w fabryce

numberOfMonths - Ilość miesięcy uwzględnionych w symulacji

numberOfProductsTypes - Ilość typów produktów

numberOfScenarios - Ilość scenariuszy wygenerowanych do symulacji

machines[**numberOfMachineTypes**] - Wektor typów maszyn (procesów)

months[**numberOfMonths**] - Wektor miesięcy symulacji

products[**numberOfProductsTypes**] - Wektor typów produktów

machineCount[**numberOfMachineTypes**] - Wektor ilości maszyn danego typu

timeToProduce[**numberOfMachineTypes**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz czasów produkcji danego produktu na danej maszynie

maxProductsInMonth[**numberOfMonths**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz maksymalnej ilości produktów, jakie można sprzedać w danym miesiącu

numberOfHoursInFactory - Ilość godzin pracy fabryki w miesiącu

mu[**numberOfProductsTypes**] - Wektor wartości oczekiwanych rozkładu t-Studenta do generacji scenariuszy

sigma[**numberOfProductsTypes**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz kowariancji dla rozkładu t-Studenta

sellProfit[**numberOfScenarios**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz wygenerowanych scenariuszy dochodów ze sprzedaży produktów

storageCost - Koszt trzymania jednej sztuki produktu w magazynie przez miesiąc

storageMax[**numberOfProductsTypes**] - Wektor maksymalnej pojemności magazynu dla każdego typu produktu

storageStart[**numberOfProductsTypes**] - Wektor ilości początkowej produktów w magazynie

1.2 Zmienne decyzyjne

produce[**numberOfMonths**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz zawierająca ilości wytwarzanych sztuk danego typu produktu w danym miesiącu

sell[**numberOfMonths**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz zawierająca ilości sprzedawanych sztuk danego typu produktu w danym miesiącu

stock[**numberOfMonths**][**numberOfProductsTypes**] - Macierz zawierająca ilości sztuk danego typu produktu znajdujących się w magazynie w danym miesiącu

workTime[numberOfMonths][numberOfMachineTypes][numberOfProductsTypes] - Macierz zawierająca czas pracy każdej maszyny dla każdego typu produktu w każdym miesiącu

if80prec[numberOfMonths][numberOfProductsTypes] - Macierz zmiennych binarnych (1 jeśli sprzedaż danego produktu w danym miesiącu przekroczyła 80% wartości maksymalnej, 0 - w przeciwnym wypadku)

lowerProfit[numberOfScenarios][numberOfMonths][numberOfProductsTypes] - Macierz przechowująca kwoty, jaką należy odjąć od zysków z poszczególnych typów produktów w poszczególnych miesiącach, ze względu na przekroczenie 80% pojemności rynku. Zmienna niezbędna do wyeliminowania obecności zmiennej binarnej w funkcji oceny

1.3 Ograniczenia

Przetłumaczono ograniczenia z języka naturalnego na język matematyczny

- Ograniczenie dolne wartości zmiennych decyzyjnych – wartości nie mogą być mniejsze od zera:

$$\forall_{\substack{m\in months\\ p\in products\\ mc\in machines}} workTime[m][mc][p] >= 0 \tag{1}$$

$$\forall_{p\in products}^{m\in months} produce[m][p] >= 0 \tag{2}$$

$$\forall_{p\in products}^{m\in months} sell[m][p] >= 0 \tag{3}$$

$$\forall_{p\in products}^{m\in months} stock[m][p] >= 0 \tag{4}$$

$$\forall_{\substack{i\in scenarios\\ m\in months\\ p\in products}} lowerProfit[i][m][p] >= 0 \tag{5}$$

- Ograniczenie czasowe pracy maszyn - Każda maszyna może pracować maksymalnie *numberOfHoursInFactory* godzin w miesiącu, zatem łączny czas pracy wszystkich maszyn danego typu nie może przekroczyć iloczynu liczby dostępnych maszyn tego typu i czasu *numberOfHoursInFactory.*

$$\forall_{mc\in machines}^{m\in months} \sum_{p\in products} (workTime[m][mc][p] <= machineCount[mc]*numberOfHoursInFa \tag{6}$$

- Ograniczenie wiążące czas pracy maszyn z produkcją - czas wykorzystania określonego typu maszyny jest równy sumie iloczynów liczby wytworzonych jednostek każdego produktu i czasu potrzebnego na obróbkę jednej jednostki tego produktu na danej maszynie:

$$\forall_{\substack{m\in months\\ mc\in machines\\ p\in products}} workTime[m][mc][p] == produce[m][p]*timeToProduce[mc][p] \tag{7}$$

- Ograniczenie maksymalnej sprzedaży wynikające z pojemności rynku w danym miesiącu:

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} sell[m][p] == maxProductsInMonth[m][p] \tag{8}$$

- Warunki definiujące zmienną binarną przy przekroczeniu 80 procent chłonności rynku:

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} sell[m][p] <= 0.8 * maxProductsInMonth[m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] \tag{9}$$

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} sell[m][p] >= 0.8 * maxProductsInMonth[m][p] * if80prec[m][p] \tag{10}$$

- Ograniczenia linearyzujące oddziaływanie zmiennych binarnych na funkcję celu:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}}^{i \in scenarios} lowerProfit[i][m][p] <= 1000000 * if80prec[m][p] \tag{11}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}}^{i \in scenarios} lowerProfit[i][m][p] <= 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] \tag{12}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}}^{i \in scenarios} 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] - lowerProfit[i][m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] <= 1000000; \tag{13}$$

- Ograniczenie sprzedaży do liczby sztuk wyprodukowanych oraz dostępnych w magazynie. Dla pierwszego miesiąca ograniczenie przyjmuje formę:

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} sell[m][p] <= produce[m][p] + storageStart[p] \tag{14}$$

  Dla każdego następnego miesiąca:

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} sell[m][p] <= produce[m][p] + stock[m-1][p] \tag{15}$$

- Ograniczenie określające stan magazynu na koniec miesiąca jako różnicę między sumą produktów wyprodukowanych i dostępnych na początku miesiąca a liczbą sprzedanych jednostek. Dla pierwszego miesiąca:

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} stock[m][p] == (produce[m][p] + storageStart[p]) - sell[m][p] \tag{16}$$

  Dla każdego następnego miesiąca:

$$\forall_{p \in products}^{m \in months} stock[m][p] == (produce[m][p] + stock[m-1][p]) - sell[m][p] \tag{17}$$

1.4 Funkcja celu

Funkcja celu w modelu jednokryterialnym polega na maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku ze wszystkich analizowanych scenariuszy. W każdym ze scenariuszy zastosowano funkcję zysku o następującej postaci

$$\forall_{i \in N}^{i<nScernarios} profit[i] = \sum_{m \in months} \sum_{p \in products} (sell[m][p] \cdot sellProfit[i][p] \\ - lowerProfit[i][m][p] - stock[m][p] * storageCost) \quad (18)$$

1.5 Implementacja

1.5.1 Scneariusz dochodów ze sprzedaży

Przychody ze sprzedaży poszczególnych typów produktów definiowane są przez wektor losowy opisany w treści zadania. W celu wygenerowania wektorów reprezentujących poszczególne scenariusze przychodów zastosowano bibliotekę MASS języka R. Implementacja została wykonana w środowisku R Studio IDE, a skrypt generujący dane zapisano w pliku *t-student.R*. W ramach przeprowadzonej symulacji wygenerowano 1000 scenariuszy realizacji przychodów.

1.5.2 Model

Model zaimplementowano w środowisku IBM ILOG CPLEX Optimization Studio z wykorzystaniem solvera CPLEX. Nazewnictwo parametrów oraz zmiennych decyzyjnych jest zgodne z opisem zawartym w tabelach **??** i **??**. Plik *wdwr25406-1.dat* zawiera definicje parametrów modelu, natomiast plik *wdwr25406-1.mod* obejmuje wczytywanie parametrów, definicje zmiennych decyzyjnych, funkcji celu oraz ograniczeń modelu. W celu uproszczenia implementacji przyjęto numeryczne oznaczenia dla miesięcy, produktów oraz procesów technologicznych. Miesiące numerowane są chronologicznie, produkty zgodnie z indeksem występującym w nazwie (P1-P4), natomiast procesy technologiczne według poniższej sekwencji:

1. Szlifowanie,
2. Wiercenie pionowe,
3. Wiercenie poziome,
4. Frezowanie,
5. Toczenie.

1.6 Rozwiązanie

Rozwiązanie optymalne modelu maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku zostało wyznaczone przy użyciu solvera CPLEX. Maksymalna wartość oczekiwana zysku wynosi około 11036,12 zł. Optymalne wartości zmiennych decyzyjnych przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{sell} = \begin{pmatrix} 160 & 0 & 80 & 160 \\ 240 & 80 & 160 & 160 \\ 0 & 240 & 80 & 160 \end{pmatrix}, \mathbf{if80prec} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{stock} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}, \mathbf{produce} = \begin{pmatrix} 110 & 0 & 30 & 110 \\ 240 & 30 & 160 & 160 \\ 50 & 290 & 130 & 210 \end{pmatrix}$$

Czasem pracy poszczególnych typów maszyn dla różnych typów produktów w każdym miesiącu obrazują następujące macierze:

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} 44 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & 0 & 66 \\ 11 & 0 & 35 & 0 \\ 6.6 & 0 & 0 & 5.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{workTime}[\mathbf{2}] = \begin{pmatrix} 96 & 18 & 0 & 0 \\ 48 & 3 & 0 & 96 \\ 24 & 0 & 140 & 0 \\ 14.4 & 1.2 & 0 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{3}] = \begin{pmatrix} 20 & 174 & 0 & 0 \\ 10 & 29 & 0 & 126 \\ 5 & 0 & 105 & 0 \\ 3 & 11.6 & 0 & 10.5 \\ 0 & 14.5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Kompletne wyniki działania solvera (wraz z macierzą lowerProfit) znajdują się w pliku solutions1.txt

1.7 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że zdolności produkcyjne przedsiębiorstwa znacznie przewyższają chłonność rynku. W kontekście maksymalizacji zysku, w określonych miesiącach ekonomicznie uzasadniona jest sprzedaż poszczególnych produktów mimo przekroczenia 80% pojemności rynkowej. Optymalna strategia nie wymaga gromadzenia zapasów ponad obligatoryjne minimum magazynowe.

2 Model dwukryterialny zysku i ryzyka

2.1 Model zadania

W ramach niniejszego zadania zastosowano model przedsiębiorstwa identyczny z tym wykorzystanym w pierwszej części analizy. Kryterium zysku jest nadal reprezentowane przez wartość oczekiwaną, która dla scenariuszy charakteryzujących się jednakowym prawdopodobieństwem wystąpienia jest równoważna wartości średniej. Kryterium ryzyka zostało zdefiniowane przy użyciu średniej różnicy Giniego, opisanej poniższą formułą:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{t'=1}^{T}\sum_{t"=1}^{T}|r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})|p_{t'}p_{t"}, \tag{19}$$

gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ reprezentuje wartość zysku osiągniętą w scenariuszu t', natomiast p_t określa prawdopodobieństwo wystąpienia scenariusza t.

Wykorzystując notację zastosowaną w niniejszym projekcie, formula określająca miarę ryzyka przyjmuje następującą formę:

$$riskMeasureGini = \frac{1}{2} \cdot \sum_{t1 \in scenarios} \sum_{t2 \in scenarios} |profit[t1] - profit[t2]| \cdot \frac{1}{numberOfScenarios} \cdot \frac{1}{numberOfScenarios} \tag{20}$$

2.2 Model preferencji

Model preferencji oparto na minimalizacji ryzyka przy zadanym poziomie średniego zysku.

$$averageProfit < minimalAverageProfit \tag{21}$$

$$minimizeriskMeasureGini \tag{22}$$

minimalAverageProfit stanowi dodatkowy parametr modelu. Pliki wdwr25406-3.dat i wdwr25406-3.mod i modelem zadania dwukryterialnego wyboru - pliki źródłowe przeznaczone dla solvera CPLEX.

2.3 Zbiór rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

Na rysunku 1 przedstawiono krzywa efektywności w przestrzeni ryzyko-zysk. Punkty reprezentują rozwiązania efektywne uzyskane dla różnych poziomów wymaganego zysku. Ze względu na ograniczenia obliczeniowe, wygenerowano 20 równomiernie rozłożonych punktów, przy czym każdy z nich opiera się na 30 scenariuszach. Ustalono limit czasowy działania solvera na 10 sekund dla pojedynczego rozwiązania (wydłużenie tego limitu przyniosło jedynie niewielką poprawę dokładności przy znacząco zwiększonym czasie obliczeń). W plikach wdwr25406-3.dat oraz wdwr25406-3.mod znajdują się definicje parametrów i modelu wraz z implementacją dla solvera CPLEX. Wartości ekstremalne - maksymalny zysk oraz minimalne ryzyko - zostały zestawione w poniższej tabeli

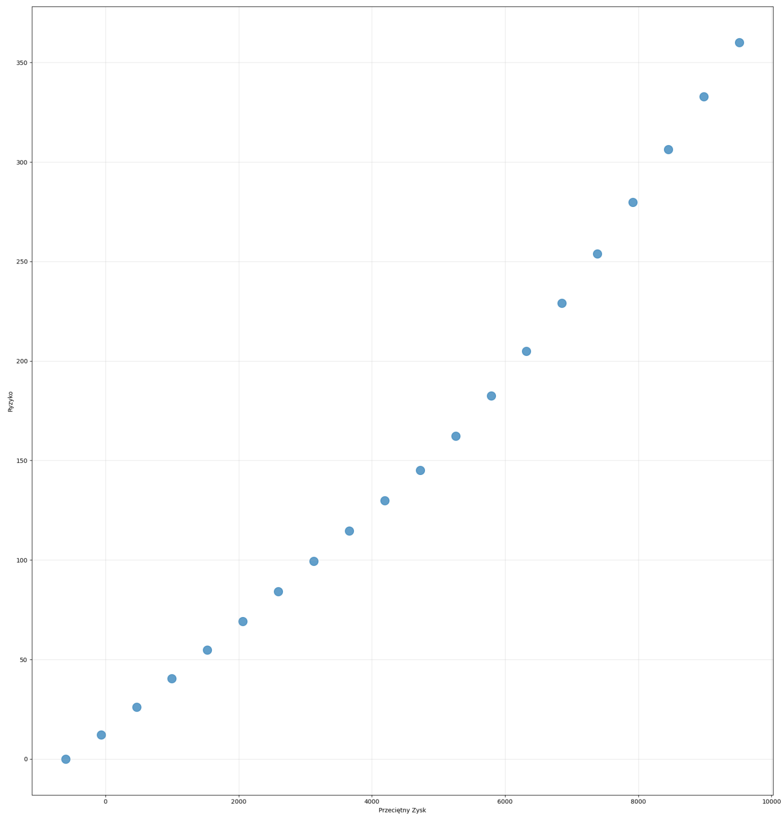

Figure 1: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

2.4 Rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku

Table 1: Rozwiązania maksymalnego zysku i minimalnego ryzyka

	Miara zysku	Miara ryzyka
Maksymalizacja zysku	9515.80 zł	360.18 zł
Minimalizacja ryzyka	-600.00 zł	0.0 zł

Rozwiązanie zadania jednokryterialnego maksymalizacji zysku charakteryzuje się również maksymalizacją poziomu ryzyka, podczas gdy zadanie minimalizacji ryzyka bez nałożenia ograniczeń na poziom zysku prowadzi do ujemnego wyniku finansowego (straty) wynikającego z rezygnacji ze sprzedaży oraz ponoszenia kosztów utrzymania obligatoryjnych zapasów magazynowych.

2.5 Dominacja stochastyczna wybranych rozwiązań efektywnych

Do weryfikacji relacji dominacji stochastycznej pierwszego rzędu (FSD) zostały wybrane 3 rozwiązania efektywne modelu: Scenariusze 1, 2 i 3, Parametry charakteryzujące średni zysk i miarę ryzyka dla analizowanych rozwiązań przedstawiono w tabeli 2.5. Implementacja parametrów oraz modelu została zawarta w plikach wdwr25406-4.dat i wdwr25406-4.mod - skrypty przeznaczone dla solvera CPLEX służące do generowania informacji o zysku i ryzyku w ramach poszczególnych scenariuszy.

Table 2: Scenariusze wybrane do analizy dominacji FSD

	1	2	3
Ograniczenie minimalnego zysku	8450.97 zł	8983.38 zł	9515.79 zł
Średni zysk	8451.02 zł	8983.40 zł	9515.80 zł
Miara ryzyka	306.38 zł	332.93 zł	360.18 zł

Aby określić relacje dominacji między wybranymi rozwiązaniami w kontekście FSD, zbudowano odwrotne dystrybuanty dla obydwu analizowanych kryteriów. Rysunek 2 prezentuje odwrotną dystrybuantę rozkładu średniego zysku w poszczególnych scenariuszach dla trzech wybranych rozwiązań efektywnych. Z analizy wykresu wynika, że rozwiązanie dla scenariusza 3 przewyższa rozwiązania scenariusza 1 i 2 w kontekście dominacji stochastycznej pierwszego rzędu, oznaczając, że dla każdego scenariusza wartość zysku osiągana przez decyzję 3 jest wyższa niż odpowiadające jej wartości dla decyzji 1 i 2. Jednocześnie rozwiązanie 2 dominuje nad rozwiązaniem 1 w sensie dominacji stochastycznej pierwszego rzędu.

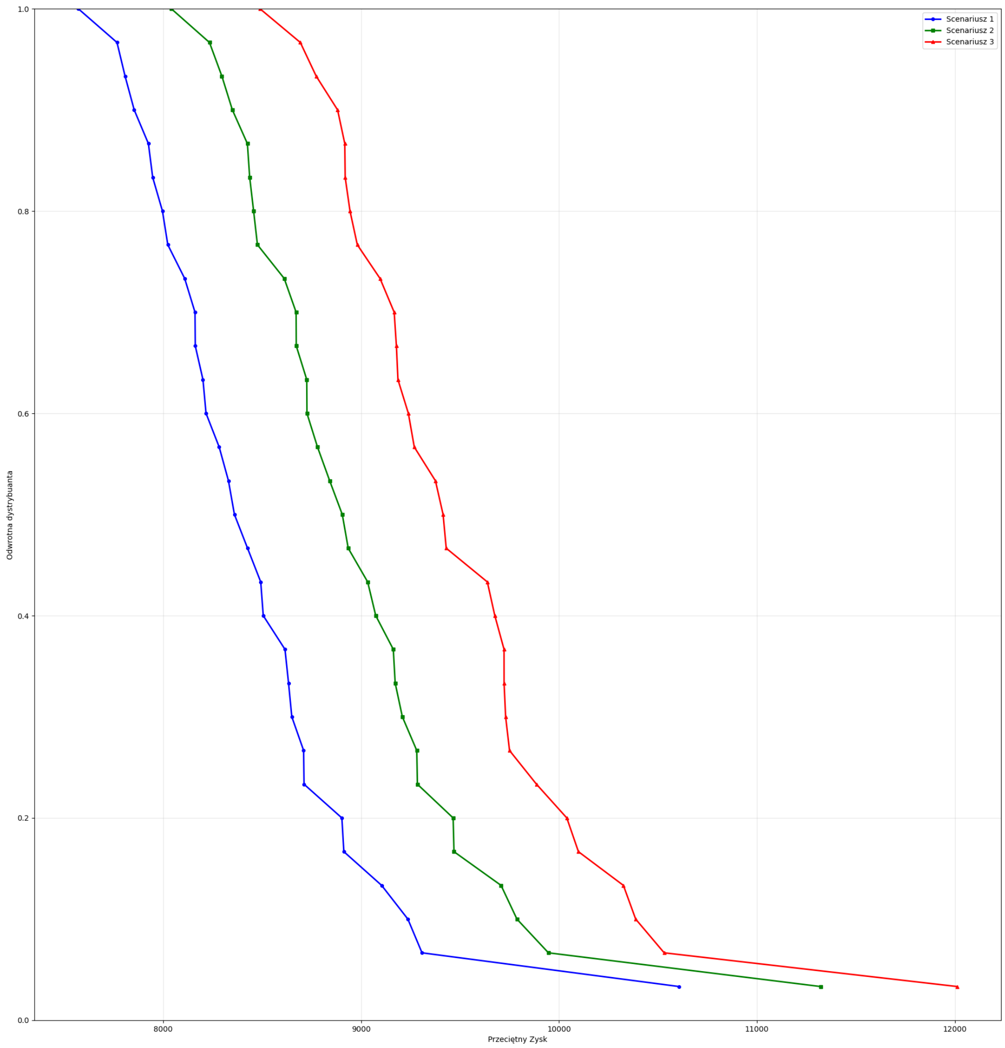

Figure 2: Odwrotna dystrybuanta rozkładu średniego zysku między scenariuszami

Rysunek 3 prezentuje odwrotną dystrybuantę rozkładu średniej różnicy Giniego jako miary ryzyka dla tych samych trzech rozwiązań efektywnych. W zakresie miary ryzyka rozwiązanie 1 charakteryzuje się dominacją nad rozwiązaniami 2 i 3, rozwiązanie 2 wykazuje również jednoznaczną dominację względem rozwiązania 3.

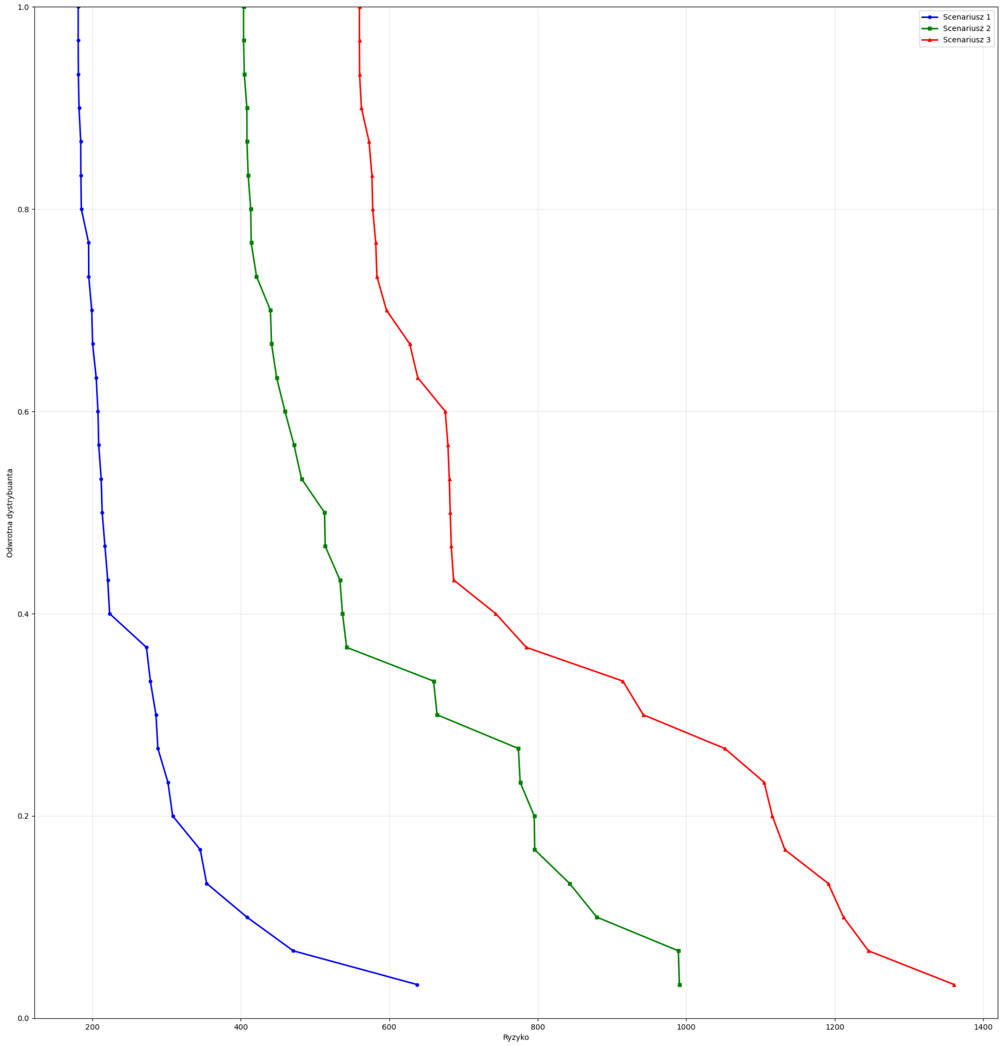

Figure 3: Odwrotna dystrybuanta rozkładu średniej różnicy Giniego między scenariuszami