Wspomaganie Decyzji w Warunkach Ryzyka

Projekt: WDWR 25406

Krzysztof Rudnicki 307585

24 maja 2025

Tre zadania

Rozwamy nastpujce zagadnienie planowania produkcji:

- Przedsibiorstwo wytwarza 4 produkty P1,...,P4 na nastpujcych maszynach: 4 szlifierkach, 2 wiertarkach pionowych, 3 wiertarkach poziomych, 1 frezarce i 1 tokarce. Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostay przedstawione w poniszej tabeli:

	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0,4	0,6	-	-
Wiercenie pionowe	0,2	0,1	-	0,6
Wiercenie poziome	0,1	-	0,7	-
Frezowanie	0,06	0,04	-	0,05
Toczenie	-	0,05	0,02	-

- Dochody ze sprzeday produktów (w z/sztuk) okrelaj skadowe wektora $\mathbf{R} = (R_1, ..., R_4)^T$. Wektor $\mathbf{R}$ opisuje 4-wymiarowy rozkad t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartoci skadowych zostay zawone do przedziau $[5; 12]$. Wektor wartoci oczekiwanych μ oraz macierz kowariancji Σ niezawonego rozkadu t-Studenta s nastpujce:

$$\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Istniej ograniczenia rynkowe na liczb sprzedawanych produktów w danym miesicu:

	P1	P2	P3	P4
Stycze	200	0	100	200
Luty	300	100	200	200
Marzec	0	300	100	200

- Jeeli sprzeda danego produktu przekracza 80 procent iloci jak moe wchon rynek, jego dochód spada o 20 procent.

- Istnieje moliwo skadowania do 200 sztuk kadego produktu w danym czasie w cenie 1 z/sztuk za miesic. W chwili obecnej (grudzie) w magazynach znajduje si po 50 sztuk kadego produkt. Istnieje wymaganie, aby tyle pozostao równie pod koniec marca.

- Przedsibiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Kada zmiana trwa 8 godzin. Mona zaoy, e kady miesic skada si z 24 dni roboczych.

Polecenia

1. Zaproponowa jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartoci oczekiwan jako miar zysku. Wyznaczy rozwizanie optymalne.

2. Jako rozszerzenie powyszego zaproponowa dwukryterialny model zysku i ryzyka ze redni jako miar zysku i redni rónic Giniego jako miar ryzyka. Dla decyzji $\mathbf{x} \in Q$ rednia rónica Giniego jest definiowana jako $\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t"=1}^{T} |r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})| p_{t'} p_{t"}$, gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizacj dla scenariusza t, p_t prawdopodobiestwo scenariusza t.

   (a) Wyznaczy obraz zbioru rozwiza efektywnych w przestrzeni zysk-ryzyko.

   (b) Wskaza rozwizania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadaj im wartoci w przestrzeni ryzyko-zysk?

   (c) Wybra trzy dowolne rozwizania efektywne. Sprawdzi, czy zachodzi pomidzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzdu. Wyniki skomentowa, odnie do ogólnego przypadku.

1 Jednokryterialny model wyboru

Model jednokryterialny wyboru w warunkach ryzyka zosta zaprojektowany w celu identyfikacji rozwizania optymalnego poprzez maksymalizacj oczekiwanej wartoci zysku. Warto oczekiwana jest kalkulowana na podstawie scenariuszy generowanych zgodnie z rozkadem t-Studenta wykorzystujcym parametry okrelone w zadaniu. W analizie zaoono równomierne prawdopodobiestwo wystpowania wszystkich scenariuszy.

1.1 Parametry modelu

Wszystkie parametry modelu zostay przedstawione w tabeli poniej wraz z ich szczegóowymi opisami. Identyczne nazewnictwo zostao zastosowane w implementacji modelu. Dla parametrów bdcych wektorami i macierzami, w nawiasach kwadratowych okrelono ich wymiary, odnoszc si do odpowiednich parametrów liczbowych.

1.2 Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne stanowi wartoci kontrolowane przez podmiot podejmujcy decyzje i s fundamentalne dla rozwizywanego problemu. Zadaniem optymalizatora jest wyznaczenie takich wartoci tych zmiennych, które umoliwi osignicie optymalnego rozwizania. W tabeli zawierajcej zmienne decyzyjne modelu zaprezentowano zmienne decyzyjne zastosowane w modelu wraz z ich szczegóowymi opisami. Przyjto t sam konwencj nazewnictwa, co w przypadku parametrów modelu.

1.3 Ograniczenia

- Ograniczenie dolne wartoci zmiennych decyzyjnych wartoci nie mog by mniejsze od zera:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products \\ mc \in machines}} \quad workTime[m][mc][p] >= 0 \tag{1}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad produce[m][p] >= 0 \tag{2}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad sell[m][p] >= 0 \tag{3}$$

Tabela 1: Tabela zawierajca parametry modelu jednokryterialnego

Nazwa parametru	Szczegóowy opis znaczenia
nMachType	Ilo typów maszyn (procesów) dostpnych w fabryce
nMonth	Ilo miesicy uwzgldnionych w symulacji
nProdType	Ilo typów produktów
nScenarios	Ilo scenariuszy wygenerowanych do symulacji
machines[nMachType]	Wektor typów maszyn (procesów)
months[nMonth]	Wektor miesicy symulacji
products[nProdType]	Wektor typów produktów
machineCount[nMachType]	Wektor iloci maszyn danego typu
prodTime[nMachType][nProdType]	macierz czasów produkcji danego produktu na danej maszynie
maxInMonth[nMonth][nProdType]	macierz maksymalnej iloci produktów, jakie mona sprzeda w danym miesicu
nHours	Ilo godzin pracy fabryki w miesicu
mu[nProdType]	Wektor wartoci oczekiwanych rozkadu t-Studenta do generacji scenariuszy
sigma [nProdType][nProdType]	Macierz kowariancji dla rozkady t-Studenta
sellProfit[nScenarios][nProdType]	Macierz wygenerowanych sceniariuszy dochodów ze sprzeday produktów
storageCost	Koszt trzymania jednej sztuki produktu w magazynie przez miesic
storageMax[nProdType]	Wektor maksymalnej pojemnoci magazynu dla kadego typu produktu
storageStart[nProdType]	Wektor iloci pocztkowej produktów w magazynie

Tabela 2: Tabela zawierajca zmienne decyzyjne modelu

Nazwa zmiennej	Szczegóowy opis znaczenia
produce[nMonth][nProdType]	Macierz zawierajce iloci wytwarzanych sztuk danego typu produktu w danym miesicu
sell[nMonth][nProdType]	Macierz zawierajca iloci sprzedawanych sztuk danego typu produktu w danym miesicu
stock[nMonth][nProdType]	Macierz zawierajca iloci sztuk danego typu produktu znajdujcych si w magazynie w danym miesicu
workTime[nMonth][nMachType][nProdType]	Macierz zawierajca czas pracy kadej maszyny dla kadego typu produktu w kazdym miesicu
if80prec[nMonth][nProdType]	Macierz zmiennych binarnych (1 jeli sprzeda danego produktu w danym miesicu przekroczya 80% wartoci maksymalnej, 0 - w przeciwnym wypadku)
lowerProfit[nScenarios][nMonth][nProdType]	Macierz przechowujca kwoty, jak naley odj od zysków z poszczególnych typów produktów w poszczególnych miesicach, ze wzgldu na przekroczenie 80% pojemnoci rynku. Zmienna niezbdna do wyeliminowania obecnoci zmiennej binarnej w funkcji oceny

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} \quad stock[m][p] >= 0 \tag{4}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} lowerProfit[i][m][p] >= 0 \tag{5}$$

- Ograniczenie czasowe pracy maszyn - Kada maszyna moe pracowa maksymalnie *nHours* godzin w miesicu, zatem czny czas pracy wszystkich maszyn danego typu nie moe przekroczy iloczynu liczby dostpnych maszyn tego typu i czasu *nHours*.

$$\forall_{\substack{m \in months \\ mc \in machines}} \sum_{p \in products} (workTime[m][mc][p] <= machineCount[mc] * nHours) \tag{6}$$

- Ograniczenie wice czas pracy maszyn z produkcj - czas wykorzystania okrelonego typu maszyny jest równy sumie iloczynów liczby wytworzonych jednostek kadego produktu i czasu potrzebnego na obróbk jednej jednostki tego produktu na danej maszynie:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ mc \in machines \\ p \in products}} workTime[m][mc][p] == produce[m][p] * prodTime[mc][p] \tag{7}$$

- Ograniczenie maksymalnej sprzeday wynikajce z pojemnoci rynku w danym miesicu:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] == maxInMonth[m][p] \tag{8}$$

- Warunki definiujce zmienn binarn przy przekroczeniu 80 procent chonnoci rynku:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] <= 0.8 * maxInMonth[m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] \tag{9}$$

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] >= 0.8 * maxInMonth[m][p] * if80prec[m][p] \tag{10}$$

- Ograniczenia linearyzujce oddziaywanie zmiennych binarnych na funkcj celu:

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} lowerProfit[i][m][p] <= 1000000 * if80prec[m][p] \tag{11}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} lowerProfit[i][m][p] <= 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] \tag{12}$$

$$\forall_{\substack{i \in scenarios \\ m \in months \\ p \in products}} 0.2 * sell[m][p] * sellProfit[i][p] - lowerProfit[i][m][p] + 1000000 * if80prec[m][p] <= 1000000; \tag{13}$$

- Ograniczenie sprzeday do liczby sztuk wyprodukowanych oraz dostpnych w magazynie. Dla pierwszego miesica ograniczenie przyjmuje form:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] <= produce[m][p] + storageStart[p] \tag{14}$$

  Dla kadego nastpnego miesica:

$$\forall_{\substack{m \in months \\ p \in products}} sell[m][p] <= produce[m][p] + stock[m-1][p] \tag{15}$$

- Ograniczenie okrelajce stan magazynu na koniec miesica jako rónic midzy sum produktów wyprodukowanych i dostpnych na pocztku miesica a liczb sprzedanych jednostek. Dla pierwszego miesica:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} stock[m][p] == (produce[m][p] + storageStart[p]) - sell[m][p] \tag{16}$$

Dla kadego nastpnego miesica:

$$\underset{\substack{m \in months \\ p \in products}}{\forall} stock[m][p] == (produce[m][p] + stock[m-1][p]) - sell[m][p] \tag{17}$$

1.4 Funkcja celu

Funkcja celu w modelu jednokryterialnym polega na maksymalizacji wartoci oczekiwanej zysku ze wszystkich analizowanych scenariuszy. W kadym ze scenariuszy zastosowano funkcj zysku o nastpujcej postaci

$$\underset{\substack{i < nScernarios \\ i \in N}}{\forall} profit[i] = \sum_{m \in months} \sum_{p \in products} (sell[m][p] \cdot sellProfit[i][p] - lowerProfit[i][m][p] - stock[m][p] * storageCost) \tag{18}$$

1.5 Implementacja modelu

1.5.1 Generacja scenariusz dochodów ze sprzeday

Przychody ze sprzeday poszczególnych typów produktów definiowane s przez wektor losowy opisany w treci zadania. W celu wygenerowania wektorów reprezentujcych poszczególne scenariusze przychodów zastosowano bibliotek MASS jzyka R. Implementacja zostaa wykonana w rodowisku R Studio IDE, a skrypt generujcy dane zapisano w pliku doczonym jako zacznik 1 - *t-student.R*. W ramach przeprowadzonej symulacji wygenerowano 1000 scenariuszy realizacji przychodów.

1.5.2 Model

Model zaimplementowano w rodowisku IBM ILOG CPLEX Optimization Studio z wykorzystaniem solvera CPLEX. Nazewnictwo parametrów oraz zmiennych decyzyjnych jest zgodne z opisem zawartym w tabelach 1 i 2. Plik *wdwr17421-1.dat* (zacznik 2) zawiera definicje parametrów modelu, natomiast plik *wdwr17421-1.mod* (zacznik 3) obejmuje wczytywanie parametrów, definicje zmiennych decyzyjnych, funkcji celu oraz ogranicze modelu. W celu uproszczenia implementacji przyjto numeryczne oznaczenia dla miesicy, produktów oraz procesów technologicznych. Miesice numerowane s chronologicznie, produkty zgodnie z indeksem wystpujcym w nazwie (P1-P4), natomiast procesy technologiczne wedug poniszej sekwencji:

1. Szlifowanie,
2. Wiercenie pionowe,
3. Wiercenie poziome,
4. Frezowanie,
5. Toczenie.

1.6 Rozwizanie

Rozwizanie optymalne modelu maksymalizacji wartoci oczekiwanej zysku zostao wyznaczone przy uyciu solvera CPLEX. Maksymalna warto oczekiwana zysku wynosi okoo 26023,63 z. Optymalne wartoci zmiennych decyzyjnych przedstawiaj si nastpujco:

$$\mathbf{sell} = \begin{pmatrix} 320 & 0 & 160 & 240 \\ 700 & 320 & 500 & 0 \\ 0 & 800 & 600 & 320 \end{pmatrix}, \mathbf{if80prec} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{stock} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}, \mathbf{produce} = \begin{pmatrix} 270 & 0 & 110 & 190 \\ 700 & 270 & 500 & 0 \\ 50 & 850 & 650 & 370 \end{pmatrix}$$

Czasem pracy poszczególnych typów maszyn dla rónych typów produktów w kadym miesicu obrazuj nastpujce macierze:

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} 108 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & 114 \\ 27 & 0 & 77 & 0 \\ 16.2 & 0 & 0 & 9.5 \\ 0 & 0 & 2.2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{workTime}[\mathbf{2}] = \begin{pmatrix} 280 & 162 & 0 & 0 \\ 140 & 27 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 350 & 0 \\ 42 & 10.8 & 0 & 0 \\ 0 & 13.5 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{workTime}[\mathbf{3}] = \begin{pmatrix} 20 & 510 & 0 & 0 \\ 10 & 85 & 0 & 222 \\ 5 & 0 & 455 & 0 \\ 3 & 34 & 0 & 18.5 \\ 0 & 42.5 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Ze wzgldu na znaczne rozmiary macierzy lowerProfit pominito jej przedstawienie w niniejszym raporcie. Kompletne wyniki dziaania solvera zostay zaczone do dokumentu jako zacznik 4.

1.7 Wnioski

Na podstawie przeprowadzonej analizy mona stwierdzi, e zdolnoci produkcyjne przedsibiorstwa znacznie przewyszaj chonno rynku. W kontekcie maksymalizacji zysku, w okrelonych miesicach ekonomicznie uzasadniona jest sprzeda poszczególnych produktów mimo przekroczenia 80% pojemnoci rynkowej. Optymalna strategia nie wymaga gromadzenia zapasów ponad obligatoryjne minimum magazynowe.

2 Model dwukryterialny zysku i ryzyka

2.1 Model zadania

Model przedsibiorstwa zosta zachowany w niezmienionej formie w porównaniu do pierwszej czci zadania. Miar zysku pozostaje warto oczekiwana, która w przypadku scenariuszy o równym prawdopodobiestwie odpowiada wartoci redniej. Miara ryzyka w niniejszym zadaniu jest reprezentowana przez redni rónic Giniego okrelon nastpujcym wzorem:

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{t'=1}^{T} \sum_{t"=1}^{T} |r_{t'}(\mathbf{x}) - r_{t"}(\mathbf{x})| p_{t'} p_{t"}, \tag{19}$$

gdzie $r_{t'}(\mathbf{x})$ oznacza realizacj zysku dla scenariusza t', a p_t - prawdopodobiestwo wystpienia scenariusza t.

W kontekcie przyjtych w projekcie oznacze, wyraenie definiujce miar ryzyka przyjmuje nastpujc posta:

$$giniRisk = \frac{1}{2} \cdot \sum_{t1 \in scenarios} \sum_{t2 \in scenarios} |profit[t1] - profit[t2]| \cdot \frac{1}{nScenarios} \cdot \frac{1}{nScenarios} \tag{20}$$

2.2 Model preferencji

Model preferencji oparto na minimalizacji ryzyka przy zadanym poziomie redniego zysku.

$$avgProfit < minAvgProfit \tag{21}$$

$$minimizeginiRisk \tag{22}$$

minAvgProfit stanowi dodatkowy parametr modelu. Zaczniki 5 i 6 zawieraj pliki z parametrami i modelem zadania dwukryterialnego wyboru - pliki ródowe przeznaczone dla solvera CPLEX.

2.3 Zbiór rozwiza efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

Na rysunku 1 zaprezentowano rozwizania efektywne modelu w przestrzeni ryzyko-zysk. Niebieskie trójkty oznaczaj rozwizania efektywne dla rónych wartoci wymaganego poziomu zysku. Uwzgldniajc ograniczenia obliczeniowe komputera, wygenerowano 52 równomiernie rozmieszczone rozwizania, z których kade bazuje na 30 scenariuszach. Wprowadzono ograniczenie czasowe dziaania solvera dla pojedynczego rozwizania na poziomie 5 minut. Cakowity czas oblicze przekroczy 3 godziny. Zaczniki 7 i 8 obejmuj pliki parametrów oraz modelu wraz ze skryptem dla solvera CPLEX, które zostay wykorzystane do uzyskania rozwiza. Kolorem ótym wyróniono rozwizanie maksymalnego zysku oraz minimalnego ryzyka. Wartoci odpowiadajce tym rozwizaniom przedstawiono w tabeli 2.4.

Rysunek 1: Obraz zbioru rozwiza efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk

2.4 Rozwizania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku

Na wykresie 1 ótymi punktami wyznaczono rozwizania charakteryzujce si maksymalnym zyskiem oraz minimalnym ryzykiem. Wartoci w przestrzeni ryzyko-zysk dla tych rozwiza przedstawiono w tabeli 2.4.

Tabela 3: Rozwizania maksymalnego zysku i minimalnego ryzyka

	Miara zysku	Miara ryzyka
Maksymalizacja zysku	26553.9 z	796.113 z
Minimalizacja ryzyka	-600.00 z	0.0 z

Rozwizanie zadania jednokryterialnego maksymalizacji zysku charakteryzuje si równie maksymalizacj poziomu ryzyka, podczas gdy zadanie minimalizacji ryzyka bez naoenia ogranicze na poziom zysku prowadzi do ujemnego wyniku finansowego (straty) wynikajcego z rezygnacji ze sprzeday oraz ponoszenia kosztów utrzymania obligatoryjnych zapasów magazynowych.

2.5 Sprawdzenie dominacji stochastycznej wybranych rozwiza efektywnych

W celu analizy dominacji stochastycznej pierwszego rzdu (FSD) wybrano 3 rozwizania efektywne modelu, oznaczone jako A, B oraz C. Wartoci redniego zysku oraz miary ryzyka dla tych rozwiza zostay zaprezentowane w tabeli 2.5. Wybór obj rozwizania charakteryzujce si zblionymi poziomami redniego zysku, przy rónicy wynoszcej okoo 500 z. Zaczniki 9 i 10 zawieraj pliki

Tabela 4: Rozwizania wybrane do analizy dominacji FSD

	A	B	C
Ograniczenie minimalnego zysku	25488.1 z	26020.5 z	26552.9 z
redni zysk	25488.3 z	26020.6 z	26553.9 z
Miara ryzyka	755.133 z	774.872 z	796.113 z

parametrów oraz modelu wraz ze skryptem dla solvera CPLEX, wykorzystane do generowania danych dotyczcych zysku i ryzyka w poszczególnych scenariuszach.

W celu weryfikacji wzajemnej dominacji wybranych rozwiza w sensie FSD przygotowano odwrotne dystrybuanty dla obu kryteriów. Rysunek 2 ilustruje odwrotn dystrybuant rozkadu redniego zysku midzy scenariuszami dla trzech wybranych rozwiza efektywnych. Analiza wykresu wskazuje, e rozwizanie C wykazuje dominacj nad rozwizaniami A i B w sensie FSD, co oznacza, e w kadym scenariuszu miara zysku dla decyzji C przewysza odpowiednie wartoci dla decyzji A i B. Ponadto rozwizanie B dominuje rozwizanie A w sensie FSD.

Rysunek 2: Odwrotna dystrybuanta rozkadu redniego zysku midzy scenariuszami

Rysunek 3 przedstawia odwrotn dystrybuant rozkadu redniej rónicy Giniego jako miary ryzyka midzy scenariuszami dla tych samych trzech rozwiza efektywnych. W kontekcie miary ryzyka rozwizanie A wykazuje dominacj nad rozwizaniami B i C, podczas gdy rozwizanie B nie dominuje w sposób kategoryczny rozwizania C. Przyczyna tego zjawiska jest zwizana z przeciciem si dystrybuant w punkcie oznaczonym kolorem ótym na wykresie przedstawionym na rysunku 2.

Rysunek 3: Odwrotna dystrybuanta rozkadu redniej rónicy Giniego midzy scenariuszami

Spis tabel

Spis zaczników

1. t-Student.R - skrypt generujcy wektory opisujce dochód ze sprzeday produktów w poszczególnych scenariuszy,
2. wdwr17421-1.dat - plik definiujcy parametry modelu jednokryterialnego,
3. wdwr17421-1.mod - plik implementujcy model jednokryterialny,
4. wdwr17421-1.log - pene wyniki dziaania solvera dla modelu jednokryterialnego,
5. wdwr17421-2.dat - plik definiujcy parametry modelu dwukryterialnego,
6. wdwr17421-2.mod - plik implementujcy model dwukryterialny,
7. wdwr17421-3.dat - plik definiujcy parametry modelu dwukryterialnego,
8. wdwr17421-3.mod - plik implementujcy model oraz skrypt do uzyskania obrazu rozwiza w przestrzeni ryzyko-zysk,
9. wdwr17421-4.dat - plik definiujcy parametry modelu,
10. wdwr17421-4.mod - plik implementujcy model oraz skrypt do uzyskania danych do analizy dominacji FSD.